Correction de l'interrogation n°2

Solution. Exercice 1.

a) Soit K l'ensemble $\{k \geq 0 \,|\, k \text{ vérifie } (P)\}$ contenu dans $\mathbb{R}$. Il est minoré par 0, et il n'est pas vide car ℓ est continue. D'après l'axiome de la borne inférieure, K admet donc une borne inférieure.

b) On peut raisonner par équivalence. Soit $k \geq 0$:

k vérifie (P)

$\Leftrightarrow \forall\, x \in E \quad \|\ell(x)\|_F \leq k\,\|x\|_E$

$\Leftrightarrow \forall\, x \in E\backslash\{0\} \quad \|\ell(x)\|_F \leq k\,\|x\|_E$ car la valeur 0 vérifie toujours cette inégalité ($\ell(0) = 0$)

$\Leftrightarrow \forall\, x \in E\backslash\{0\} \quad \dfrac{\|\ell(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq k$

$\Leftrightarrow \displaystyle\sup_{x\in E\backslash\{0\}} \frac{\|\ell(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq k$ d'où l'équivalence.

c) D'après la question précédente, l'ensemble K est tout simplement l'intervalle $\left[\displaystyle\sup_{x\in E\backslash\{0\}} \frac{\|\ell(x)\|_F}{\|x\|_E}, +\infty\right[$.

Par conséquent, $\|\ell\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \inf K = \displaystyle\sup_{x\in E\backslash\{0\}} \frac{\|\ell(x)\|_F}{\|x\|_E}$. De plus, $\|\ell\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ appartient à K. Et par définition de K, $\|\ell\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ vérifie donc la propriété (P).

Solution. Exercice 2.

a) Pour tous ℓ_1, ℓ_2 dans E' et λ, μ dans $\mathbb{R}$,

$$J_{x_0}(\lambda\,\ell_1 + \mu\,\ell_2) = (\lambda\,\ell_1 + \mu\,\ell_2)(x_0) = \lambda\,\ell_1(x_0) + \mu\,\ell_2(x_0) = \lambda\,J_{x_0}(\ell_1) + \mu\,J_{x_0}(\ell_2)$$

donc $J_{x_0} : E' \to \mathbb{R}$ est bien linéaire.

b) Pour tout $\ell \in E'$, $|J_{x_0}(\ell)| = |\ell(x_0)|$. Or, d'après la question c) de l'exercice 1, $k = \|\ell\|_{E'}$ vérifie la propriété (P). Pour $x = x_0$, cela donne $|\ell(x_0)| \leq \|\ell\|_{E'}\|x_0\|_E$. Ainsi,

$$\forall\,\ell \in E' \qquad |J_{x_0}(\ell)| \leq \|\ell\|_{E'}\|x_0\|_E = \|x_0\|_E\|\ell\|_{E'}.$$

Par conséquent, $J_{x_0} : E' \to \mathbb{R}$ est continue et

$$\|J_{x_0}\|_{E''} = \|J_{x_0}\|_{\mathcal{L}(E',\mathbb{R})} = \sup_{\ell\in E'\backslash\{0\}} \frac{|J_{x_0}(\ell)|}{\|\ell\|_{E'}} \leq \|x_0\|_E.$$

c) L'application $J : E \to E''$ est linéaire : en effet, pour tous $x_1, x_2 \in E$, tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $\ell \in E'$,

$$J_{\lambda\,x_1+\mu\,x_2}(\ell) = \ell(\lambda\,x_1 + \mu\,x_2) = \lambda\,\ell(x_1) + \mu\,\ell(x_2) = \lambda\,J_{x_1}(\ell) + \mu\,J_{x_2}(\ell) = (\lambda\,J_{x_1} + \mu\,J_{x_2})(\ell)$$

donc $J_{\lambda\,x_1+\mu\,x_2} = \lambda\,J_{x_1} + \mu\,J_{x_2}$.

Puis, d'après la question précédente, pour tout $x \in E$, $\|J_x\|_{E''} \leq \|x\|_E \leq 1 \times \|x\|_E$. Donc J est continue et

$$\|J\|_{\mathcal{L}(E,E'')} = \sup_{x\in E\backslash\{0\}} \frac{\|J_x\|_{E''}}{\|x\|_E} \leq 1.$$

Solution. Exercice 3.

a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme γ est dérivable en t, γ est différentiable en t et $D\gamma(t)(h) = \gamma'(t)\,h$, pour tout $h \in \mathbb{R}$. Et comme f est différentiable sur Ω (de classe $\mathcal{C}^1$) et que $\gamma(t) \in \Omega$, $f \circ \gamma$ est différentiable (et dérivable) en t et $D(f\circ\gamma)(t) = Df(\gamma(t)) \circ D\gamma(t)$. Donc

$$(f\circ\gamma)'(t) = D(f\circ\gamma)(t)(1) = Df(\gamma(t)) \circ D\gamma(t)(1) = Df(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

b) On remarque que $g = f \circ \gamma$ où $\gamma : t \mapsto e^t x$ qui est dérivable. D'après la question précédente, g est dérivable et $g'(t) = Df(\gamma(t))(\gamma'(t)) = Df(e^t x)(e^t x)$. Et avec $t = 1$, $g'(1) = Df(x)(x)$. Mais f est homogène, donc $g(t) = f(e^t x) = (e^t)^\alpha f(x) = e^{\alpha t} f(x)$ et $g'(t) = \alpha g(t)$. Finalement, $g'(1) = Df(x)(x) = \alpha g(1) = \alpha f(x)$.

c) On a déjà vu que $g'(t) = Df(e^t x)(e^t x)$. Or par hypothèse $Df(e^t x)(e^t x) = \alpha f(e^t x) = \alpha g(t)$, donc $g'(t) = \alpha g(t)$. Donc g vérifie l'équation différentielle $y' = \alpha y$ et donc g est de la forme $g(t) = e^{\alpha t} g(0)$. D'où $f(e^t x) = e^{\alpha t} f(e^0 x) = (e^t)^\alpha f(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En remplaçant e^t par t, on obtient $f(tx) = t^\alpha f(x)$ pour tout $t > 0$.